| | |
|---|---|
| Title | Statics and Dynamics of Kink Solutions |
| Author(s) | 伊藤, 浩之; 田崎, 晴明 |
| Citation | 物性研究 (1986), 46(1): 54-57 |
| Issue Date | 1986-04-20 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/91962 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

## §4　あと一言

上述の結果は数値解析であるので，解析的研究が今後望まれる。(1)式で1階微分項$\rho^2 d\phi/dz$が存在しない場合には積分が(5)式に加えもう一つ知られており体系は可積分となる[4]。今の場合には，ソリトン格子解の不安定化が認められており，不可積分であると考えられる。また，様様な実在の体系に適用するのも今後の課題である[5]。

## 文　献


1)　M. Yamashita, Prog. Theor. Phys. **74** (1985), 622.

2)　P. G. de Gennes, Solid State Commun. **6** (1968), 163.
W. L. McMillan, Phys. Rev. **B14** (1976), 1496.

3)　M. B. Walker and A. E. Jacobs, Phys. Rev. **B24** (1981), 6770.
P. Prelovsek, J. Phys. **C15** (1982), L269.
M. Yamashita and O. Tamada, J. Phys. Soc. Jpn. **54** (1985), 2963.

4)　J. Hietarinta, Phys. Lett. **96A** (1983), 273.

5)　M. Yamashita, Jpn. J. Appl. Phys. （第6回強誘電体国際会議（1985年8月於神戸）プロシーディング）.


# Statics and Dynamics of Kink Solutions

東大・理　伊藤浩之，田崎晴明

## §0.　Introduction

Multi-componentのorder parmeterを持つ非線形な系のモデルとして，一次元非線形Klein-Gordon方程式に従うN成分スカラー場を考え，そこでのキンク解のstatic，dynamicな性質を調べることにする。

## §1.　Static Kink solutions

キンク解とは，場のlocalポテンシャル$V(\phi)$の縮退したground stateを空間変化を持ってつなぐ有限の励起エネルギーを持つ解であり，具体的には，configuration energy $E(\phi)$ ［下式］の変分における極値点として定義される。

$$E(\phi)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\left[\frac{1}{2}|\phi_x|^2+V(\phi)\right],\qquad \phi=(\phi_1,\ \cdots,\ \phi_N)\in \boldsymbol{R}^N.$$

ところで，上式は$x$を〝時間〟だと読み替えれば，ポテンシャル $-V$ の下でのN自由度質点力学系の Actionになっていることは，良く知られている。つまり，Field Model でのキンク解は，ポテンシャル $-V$ の不安定な fixed point をつなぐ質点の運動の trajectoryとして理解できる。この〝力学系〟対応を考えれば，Field Modelは，staticなキンク解に関して，対応する〝力学系〟が〝可積分〟な場合と〝非可積分〟な場合に分類される(Field Model の意味での可積分，非可積分性と混同の無いように)。前者の場合には〝力学系〟が解けるので，すべてのキンク解を求めることができる。例としては，一自由度〝力学系〟に対応する一成分系($N=1$)，(sine-Gordon, $\phi^4$ など)の他にも，二成分非等方 $|\phi|^4$ モデル(Ref. 1)などがある。後者のモデルでは，二種類のトポロジカルキンク解とone parameter family のノントポロジカルキンク解が存在する。

## §2 Phase stability

求められた staticなキンク解の phase stabilityは，Euler-Lagrange 方程式をキンクまわりの small deviation について線形化し，線形モードに対する固有値問題を解いて，負の固有値を持つ不安定摂動モードの存在の有無を調べるというのがスタンダードな方法になっている。しかし，この計算は，多成分の場を扱う場合などには，ほとんど困難になってしまう。

ところで，staticなキンク解は，もともと configuration energy $E(\phi)$ の functionalとしての極値点として求まるという変分的立場に戻れば，極値点における $E(\phi)$ の 2nd variational derivative $\dfrac{\delta^2 E}{\delta\phi^2}$ の負の固有値の数(モース指標)が，キンク解に対する独立な不安定摂動モードの数に一致することが分かる。変分学におけるモースの指標定理を用いることで，この負の固有値の数はキンク trajectory とこれに無限小近い trajectories との intersection numberを使って計算することのできる常に有限の量であることがわかる(詳しくは Ref. 2)。

ゆえに対応する〝力学系〟が〝可積分〟である場合には，すべての trajectories の flow を知ることができるのでキンク解の安定性は簡単に調べられる。例えば，一成分スカラー場においては，〝力学系〟のターニング・ポイントが intersection pointになっていることから，トポロジカルキンクは安定であるが，ノントポロジカルキンクは，常に一つの不安定モードを持つことが示せる。二成分の非等方 $|\phi|^4$ モデルにおいては，この stability theory を用いることで，安定な解は一種類のトポロジカルキンクだけであり，もう一種のトポロジカルキンクとすべてのノントポロジカルキンクは不安定であることが始めて解析的に示される(Ref. 2)。

## § 3. Dynamical properties of Kink solutions

実際のfield dynamicsでは時間と空間の構造が問題になる複雑な世界であるが，ここでは，実際にEuler-Lagrange方程式をnumericalに解いていくつかのキンク解のdynamicalな性質を調べてみる。具体的には，一成分系のノントポロジカルキンクのdecayや，二成分非等方 $|\phi|^4$ モデルでの不安定なトポロジカルキンク解の安定な解へのdecayについて行なった。これらの例では，configuration energy functional $E(\phi)$ のsaddle pointである不安定キンク解が，不安定モードに従ってlocal minimumである別の解へdecayし，余分なエネルギーは，放出されるフォノンモードへ移されるというsimpleなdynamicsを示す。

ところが，後者のモデルでのone parameter familyである不安定なノントポロジカルキンク族のdecayに関しては，すべてが同じエネルギーを持っているにもかかわらずdecayのprocessは多様であり，wave packetを放出してburstしたり，非常にdampingの弱いキンク・アンチキンクbound stateであるbreather likeな振動解に移っていったりする。このような複雑なdynamicsを示す原因としては，ノントポロジカルであるというtopologicalな原因の他に，キンク間の相互作用が大きく関与していると考えられる。

## § 4. Further problems（主観的見地から）

Field modelとして可積分な場合には，無限自由度としての力学系の時間と空間に関する構造が無限個の保存量によって完全に決定してしまう。また，今回示したようにstaticキンクの性質は，対応する〝力学系〟が〝可積分〟である場合には，有限自由度の質点の運動と対応して完全に決定される。では，ほとんどのモデルの属する非可積分かつ〝非可積分〟である系のキンク解のstatic，dynamicな性質はどのようになっているのだろうか。この場合，ground stateをつなぐどのようなキンク解が存在するのかという問題すらこれを解くsystematicな方法は無い。それ故，energy functional $E(\phi)$ の極値点（キンク解）の個数などを解析できる大域的な理論（Nonlinear Analysis）の研究が課題の一つとして残されていると思われる。

また，非可積分系において，キンクやそれらの間の相互作用によって生みだされる非線形性の顕著な複雑さを，系を無限自由度力学系としてとらえた時に，キンクの統計性と合わせてどのように理解して行けるのだろうか。これらの系に普遍的なキンクの担う役割というものが存在するのだろうか。モデルの数だけ（つまり無数に），多様な複雑さが存在するといった荒涼とした世界である可能性もある。

**References**

1) E. Magyari and H. Thomas: Phys. Lett. **100A** (1984) 11;
H. Ito: Phys. Lett. **112A** (1985) 119.
2) H. Ito and H. Tasaki: Phys. Lett. **113A** (1985) 179.

# 電圧の反転に対して対称な電気回路におけるソリトンの実験

横浜国大・工　石渡信吾，渡辺慎介，田中　裕

## 1. はじめに

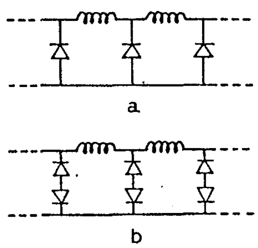
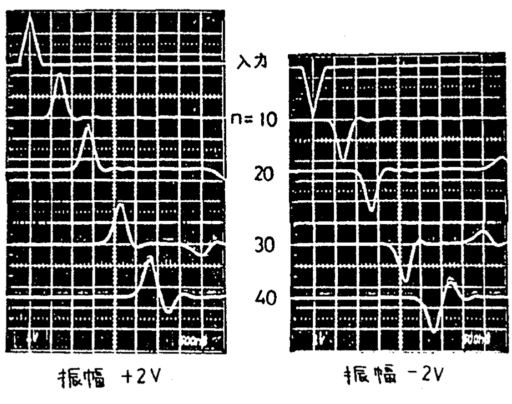


Fig. 1

戸田格子に等価な非線形LC梯子形回路として非線形キャパシタに可変容量ダイオードを用いたFig. 1. aのような電気回路がある。この回路では正の電圧振幅をもつパルスは安定に伝播することができるが，負の電圧パルスは回路を安定に伝播することができない。そこでFig 1. bのように可変容量ダイオードを2個逆向きにつないでキャパシタとした回路を考える。この回路では負のパルスに対して下側のダイオードがうまく働いて，正負のパルスが安定に伝播できることが予想される。実際，このような回路で実験を行ったところ正負のパルスが安定に伝播することが確かめられた。今回はこの回路における二，三の実験結果について報告する。

## 2. 実験とその結果



(i)　パルスの伝播　(ii)
Fig. 2

まずFig 1. bの回路の左端からパルスを入力したときの正負の電圧パルスの伝播の様子をFig. 2に示す。(i)は振幅＋2Vの正のパルス，(ii)は振幅－2Vの負のパルスの場合である。尚$n=20$段以降右側に現われる小さな波形は回路の右端での反射波である。このように正負しかも対称な形のパルスが安定に伝播することがわかる。

次に正のパルスについて，パルスの振幅と伝播速度及び幅（時間的幅）との関係をそれぞれFig. 3, 4に示す。またFig. 5はキャパシタに用いたペアのダイオードの容量特性である。特性は正負の電圧に対して対称であり，ここでは正の側のみ示す。これを見ると電圧と容量の逆数の関係は0～5Vの範囲で直線を示している。